Aufgabe 1

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Max} & 2x_1 & - & x_2 & & \\ \text{u.d.N.} & -x_1 & + & x_2 & \leq & -5 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 8 \end{array}$$

$$-4 \leq x_1 \leq 5$$
$$-7 \leq x_2 \leq 4$$

Bringen sie das LP in allgemeine Gleichungsform und stellen sie dann ein Phase-1 Hilfproblem auf. Geben sie für das Hilfsproblem eine zulässige Basislösung mit zugehörigem Zielfunktionswert an.

Allgemeine Gleichungsform

$$\begin{aligned} &\max \sum c_j x_j \\ &s.t.\ \sum a_{ij} x_j = b_i \\ &\qquad l_j \leq x_j \leq u_j \end{aligned} \qquad cx = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad ax = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{l} \\ -U \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_S \\ x_L \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ -L \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

Hilfsproblem

$$\begin{aligned} &\min \sum w_{n+i} x_{n+i} \\ &\qquad \sum a_{ij} x_j + x_{n+i} = 0 \\ &\qquad\quad l_j \leq x_j \leq u_j \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Künstliche Variablen

$$x_5 = 0 - (-x_1 + x_2 + x_3) = 0 - (-5 - 7 + 5) = 7 \quad \rightarrow \quad w_5 = 1, \quad l_5 = 0, \quad u_5 = \infty$$
$$x_6 = 0 - (x_1 - 2x_2 + x_4) = 0 - (5 + 14 - 8) = -11 \quad \rightarrow \quad w_6 = -1, \ l_6 = -\infty, \ u_6 = 0$$

$$\begin{aligned} &\max z = -x_5 + x_6 \\ &s.t.\ x_5 = x_1 - x_2 - x_3 \\ &\qquad x_6 = -x_1 + 2x_2 - x_4 \end{aligned} \qquad \rightarrow \quad z = -18 \qquad x_B^* = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Lösen sie das folgende LP mit der dualen Simplexmethode.

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Max} & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{u.d.N.} & x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

$$\max z = 0 - x_1 - 2x_2$$
$$x_3 = -4 - x_1 + x_2$$
$$x_4 = -2 + x_1 - 3x_2$$
$$x_k \geq 0$$

Auswahl von x_3 wg. höchster Unzulässigkeit als verlassende Variable und x_2 als einzig mögliche eintretende Variable.

$$\max z = -8 - 3x_1 - 2x_3$$
$$x_2 = 4 + x_1 + x_3$$
$$x_4 = -14 - 2x_1 - 3x_3$$
$$x_k \geq 0$$

Das Problem ist jetzt dual unbeschränkt und daher primal unzulässig!

Aufgabe 3

Gegeben seien folgendes LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Max} & 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{u.d.N.} & x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 1 \\ & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

a) Geben sie das zugehörige duale Problem an.

$$\min y_1 + 3y_2$$
$$s.t.\ y_1 + 3y_2 \geq 4$$
$$4y_1 - y_2 \geq 1$$
$$y_2 \geq 3$$
$$y_k \geq 0$$

b) Betrachten sie folgendes Dictionary des primalen Problems:

$$\begin{array}{llcrcrcrcr} \text{Max} & z & = & 10 & - & 6x_1 & - & x_4 & - & 3x_5 \\ \text{u.d.N.} & x_2 & = & \frac{1}{4} & - & \frac{1}{4}x_1 & - & \frac{1}{4}x_4 & & \\ & x_3 & = & 3\frac{1}{4} & - & 3\frac{1}{4}x_1 & - & \frac{1}{4}x_4 & - & x_5 \\ & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Geben sie eine optimale Lösung $(x_1^*, \ldots, x_5^*)^T$ für das primale *und* eine optimale Lösung $(y_1^*, \ldots, y_5^*)^T$ für das duale Problem an.

$x^* = (0 \quad 1/4 \quad 13/4 \quad 0 \quad 0)$

Zuordnung von primalen zu dualen Variablen:

$x_1 \leftrightarrow y_3$

$x_2 \leftrightarrow y_4$

$x_3 \leftrightarrow y_5$

$x_4 \leftrightarrow y_1$

$x_5 \leftrightarrow y_2$

$y^* = (1 \quad 3 \quad 6 \quad 0 \quad 0)$

Aufgabe 4

F / F / W / F / F

Aufgabe 5

Gegeben sei

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{B} : 3y - 3x \leq 1\}$$

Ist die Ungleichung

$$y - \frac{3}{2}x \leq 0$$

eine valide Ungleichung für X? Beweisen sie ihre Antwort.

$y = 0:$

$3y - 3x \leq 1$

$0 - 3x \leq 1$

$x \geq -1/3$

$x \geq 0 \ (wg.\ x \in \mathbb{R}_+)$

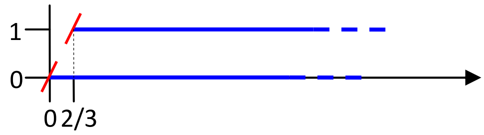
$y = 1:$

$3y - 3x \leq 1$

$3 - 3x \leq 1$

$x \geq 2/3$

Validität der Ungleichung überprüfen:



$y = 0:$ | $y = 1:$
$0 - 3/2x \le 0$ | $1 - 3/2x \le 0$
$x \ge 0$ | $x \ge 2/3$

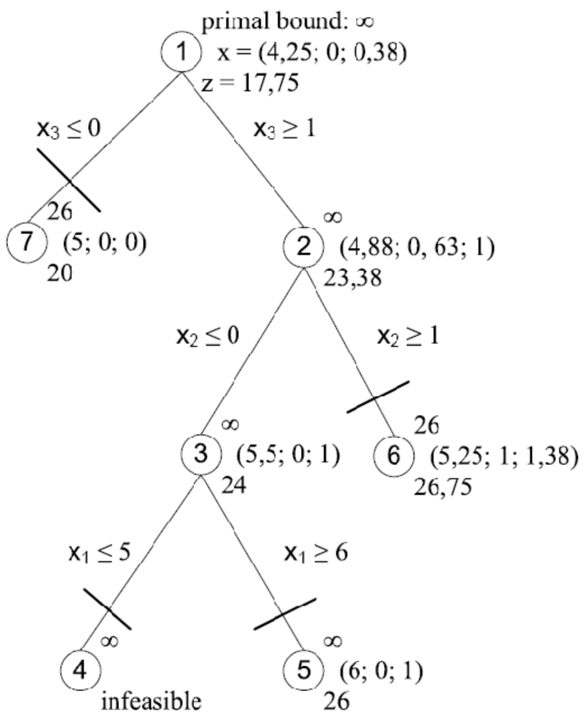
Sowohl für $y = 0$ als auch für $y = 1$ werden keine gültigen Lösungen des Originalproblems abgeschnitten. Daher ist diese Ungleichung valide.

Aufgabe 6

Das IP-Problem

$$\begin{aligned} \min\ 4x_1+3x_2+2x_3 & \\ 2x_1+2x_2-4x_3 &\ge 7 \\ x_1-3x_2+2x_3 &\ge 5 \\ x_1 &\le 6 \\ x_2 &\le 3 \\ x_3 &\le 2 \\ x &\in \mathbb{Z}_+^3 \end{aligned}$$

wurde mit einem Branch-and-bound Algorithmus gelöst. Der unten angegebene Baum spiegelt den Lösungsprozess wieder. Dabei gibt die Knotennummer die Reihenfolge in der die Knoten bearbeitet wurden an. Neben jedem Knoten ist der Zielfunktionswert der bisher besten Lösung (primal bound), der Zielfunktionswert des LPs in diesem Knoten (z) und die Belegung der Variablen in dieser Lösung (x) angegeben.



a) Geben sie zu den Knoten 4, 5, 6 und 7 an warum sie abgeschnitten werden konnten. Begründen sie kurz ihre Antwort.

Knoten 4: prune by infeasibility

Knoten 5: prune by optimality, weil hier die primal bound besser ist als die bisher gefundene ($26 < \infty$). Branching ist auch nicht mehr möglich, weil alle Variablen ganzzahlig.

Knoten 6: prune by bound, weil hier der LP-Zielfunktionswert bereits schlechter (höher) ist, als die bisher gefundene IP-Wert. Die Kindsknoten von 6 können nur noch schlechter werden.

Knoten 7: prune by optimality, hier wird ein neuer besserer IP-Wert gefunden

b) Wieviele Knoten hätte man gebraucht, wenn Knoten 7 vor Knoten 2 berechnet worden wäre? Begründen sie kurz ihre Antwort.

Jetzt wäre es möglich mit 3 Knoten die optimale Lösung zu finden, weil die LP Lösung für Knoten 2 bereits schlechter ist, als die bis dahin gefundene bessere IP Lösung.