Aufgabe 1)

Gegeben ist:

$X = \{x \in B^7 : 16x_1 + 11x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 4x_6 + 2x_7 \leq 19\}$ mit Punkt $x^* = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1/2 \quad 0)$

Def. für einen Cut:

A set $C \subseteq N$ is a Cover if $\sum_{j \in C} a_j > b$. A cover is minimal if $C \setminus \{j\}$ is not a cover for any $j \in C$.

If $C \subseteq N$ is a cover for X, the cover inequality $\sum_{j \in C} x_j \leq |C| - 1$ is valid vor X.

a)

Ein Cover für X, der durch x^* verletzt wird, ist $C = \{2,4,6\}$

also $x_2 + x_4 + x_6 \leq 2$. Dies ist auch der einzig mögliche.

b)

Dieser Cut wird durch den sogenannten Extended Cover Cut verschärft, indem gilt:

$E(C) = C \cup \{j : a_j \geq a_i \textit{ for all } i \in C\}$, d. h. das Hinzufügen eines Koeffizienten aus X nach C, welcher größer ist, als alle Koeffizienten in C. $E(C) = \{1,2,4,6\}$ hier dann: $x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \leq 2$

c)

Procedure to Lift Cover Inequalities

$C = \{2,4,6\}$

Die Ungleichung $x_2 + x_4 + x_6 \leq 2$ ist gültig für $\{x \in B^4 : 11x_2 + 6x_4 + 4x_6 \leq 19\}$

Wenn $x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 0$ gilt, welche Werte kann α_1 dann noch höchstens annehmen für die Ungleichung $\alpha_1 x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \leq 2$, ohne dass $\{x \in B^5 : 16x_1 + 11x_2 + 6x_4 + 4x_6 \leq 19\}$ die Gültigkeit verliert. Ist $x_1 = 0$, dann ist die Ungleichung für alle Werte von α_1 gültig.

Ist aber $x_1 = 1$, dann ist es dann und nur dann eine gültige Ungleichung, wenn $\alpha_1 \leq 2 - \zeta$ mit

$\zeta = \max\{x_2 + x_4 + x_6 : 11x_2 + 6x_4 + 4x_6 \leq 19 - 16 = 3, x \in B^3\}$

Iteration 1:

$j_1 \ldots j_r \in N \setminus C \quad \rightarrow \quad j = \{1,3,5,7\}$

Modell	x2	x4	x6	TYP	RHS	
Max	1	1	1			
LB	0	0	0			$t = 1$
UB	1	1	1			
TYP	BIN	BIN	BIN			
s.t.	11	6	4	<=	3	$\alpha_{j_t} = \|C\| - 1 - \zeta_t = 3 - 1 - 0 = 2$
Activity	0	0	0		0,00	

$\zeta_1 = \max\{x_2 + x_4 + x_6 : 11x_2 + 6x_4 + 4x_6 \leq 19 - 16 = 3, x \in B^3\}$

Iteration 2:

$j_1 \ldots j_r \in N \setminus C \quad \rightarrow \quad j = \{3,5,7\}$

Modell	x1	x2	x4	x6	TYP	RHS
Max	2	1	1	1		

LB	0	0	0	0			$t=2$
UB	1	1	1	1			
TYP	BIN	**BIN**	**BIN**	**BIN**			
s.t.	16	11	6	4	<=	10	$\alpha_{j_t} = \lvert C \rvert - 1 - \zeta_t = 3 - 1 - 2 = 0$
Activity	0	0	1	1		2,00	

$$\zeta_2 = \max\left\{2x_1 + x_2 + x_4 + x_6 : 16x_1 + 11x_2 + 6x_4 + 4x_6 \le 19 - 9 = 10, x \in B^4\right\}$$

Iteration 3:

$$j_1 \dots j_r \in N \setminus C \quad \to \quad j = \{5, 7\}$$

Modell	x1	x2	x3	x4	x6	***TYP***	***RHS***	
Max	2	1	0	1	1			
LB	0	0	0	0	0			$t=3$
UB	1	1	1	1	1			
TYP	BIN	**BIN**	BIN	**BIN**	**BIN**			
s.t.	16	11	9	6	4	<=	13	$\alpha_{j_t} = \lvert C \rvert - 1 - \zeta_t = 3 - 1 - 2 = 0$
Activity	0	0	0	1	1		2,00	

$$\zeta_3 = \max\left\{2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + x_6 : 16x_1 + 11x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 4x_6 \le 19 - 6 = 13, x \in B^5\right\}$$

Iteration 4:

$$j_1 \dots j_r \in N \setminus C \quad \to \quad j = \{7\}$$

Modell	x1	x2	x3	x4	x5	x6	***TYP***	***RHS***	
Max	2	1	0	1	0	1			
LB	0	0	0	0	0	0			$t=4$
UB	1	1	1	1	1	1			
TYP	BIN	**BIN**	BIN	**BIN**	BIN	**BIN**			
s.t.	16	11	9	6	6	4	<=	17	$\alpha_{j_t} = \lvert C \rvert - 1 - \zeta_t = 3 - 1 - 2 = 0$
Activity	0	0	0	1	0	1		2,00	

$$\zeta_4 = \max\left\{2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + x_6 : 16x_1 + 11x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 4x_6 \le 19 - 2 = 17, x \in B^6\right\}$$

Abbruch der Methode, weil $t = r$!

We finish with a facet-defining inequality: $2x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \le 2$

Aufgabe 2)

Ursprungsproblem

A_2a	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	y8	y9	y10	***TYP***	***RHS***
Min											120	60	96	108	108	108	118	57	133	101		
LB																						
UB	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	**INF**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
TYP	**CON**	**CON**	**CON**	**CON**	**CON**	**CON**	**CON**	**CON**	**CON**	**CON**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**		
BAL(1)	-1	-1	1	1																	=	100
BAL(2)				-1	-1	1	1	-1													=	-20
BAL(3)		1	-1			-1			-1	1											=	-20
BAL(4)	1				1					-1											=	-40
BAL(5)							-1	1	1												=	-20

VUB(1)	1										-60										<=	0
VUB(2)		1										-60								<=	0
VUB(3)			1										-60							<=	0
VUB(4)				1										-60						<=	0
VUB(5)					1										-60					<=	0
VUB(6)						1										-60				<=	0
VUB(7)							1										-60			<=	0
VUB(8)								1										-60		<=	0
VUB(9)									1										-60	<=	0
VUB(10)										1										-60	<=	0
Activity	0,00	0,00	60,00	40,00	0,00	0,00	20,00	0,00	0,00	40,00	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1		423,00

Durch die Typänderung bei y von BIN auf CON ergibt sich ein $z^* = 274\,{}^2\!/_3$

Flow Cover Cuts

A set $C = C_1 \cup C_2$ *with* $C_1 \subseteq N_1,\ C_2 \subseteq N_2$ is a generalized cover for X if

$$\sum_{j\in C_1} a_j - \sum_{j\in C_2} a_j = b + \lambda \text{ with } \lambda > 0 .$$

$$L_2 = \left\{ j \in N_2 \setminus C_2 : \lambda y_j^* < x_j^* \right\}$$

The flow cover inequality:

$$\sum_{j\in C_1} x_j + \sum_{j\in C_1} \left(a_j - \lambda\right)\left(1 - y_j\right) \le b + \sum_{j\in C_2} a_j + \lambda \sum_{j\in L_2} y_j + \sum_{j\in N_2\setminus(C_2\cup L_2)} x_j$$

Zeile 1:

$$x^* = (0 \quad 0 \quad 60 \quad 40 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 40), \quad y^* = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 2/3 \quad 0 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 2/3)$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 100 \qquad \to N_1 = \{3,4\}, N_2 = \{1,2\}$$

Mit Hilfe der „Separation Heuristic für Flow Cover Cuts“ einen „Generalized Cover“ erzeugen

$$\min \sum_{j\in N_1} \left(1 - y_j^*\right) z_j - \sum_{j\in N_2} y_j^* z_j \qquad \min -0z_1 - 0z_2 + 0z_3 + 1/3 z_4$$

$$s.t. \sum_{j\in N_1} a_j z_j - \sum_{j\in N_2} a_j z_j > b \qquad s.t. -60z_1 - 60z_2 + 60z_3 + 60z_4 > 100, \quad z \in B^4$$

Aufgabe 2	x1	x2	x3	x4	***TYP***	***RHS***
Min	0	0	0	1/3		
LB	0	0	0	0		
UB	1	1	1	1		
TYP	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**		
cover	-60	-60	60	60	>=	100,01
Activity	0	0	1	1		0,33

Das Ergebnis zeigt, dass nur die beiden Variablen x_3 und x_4 für C_1 und C_2 in Frage kommen. Da beide Positiv sind ergibt sich: $C_1 = \{3,4\}$, $C_2 = \varnothing$ mit $\lambda = 20$

$(60 + 60 = 100 + \lambda)$

$L_2 = \varnothing$

$$x_3 + x_4 + (60-20)^+ (1 - y_3) + (60-20)^+ (1 - y_4) \le 100 + x_1 + x_2$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 40 - 40y_3 + 40 - 40y_4 \le 100$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 40y_3 - 40y_4 \le 20$$

$$-0 - 0 + 60 + 40 - 40*1 - 40*2/3 = 33\,{}^1\!/_3 \not\le 20 \quad \textit{Cut Verletzung}$$

$z^* = 310\,{}^{2}\!/_{3}$ noch keine IP-Lösung

Zeile 2:

$$-x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8 = -20$$
$$x_4 + x_5 - x_6 - x_7 + x_8 \le 20 \qquad \rightarrow \quad N_1 = \{4,5,8\}, N_2 = \{6,7\}$$

Mit Hilfe der „Separation Heuristic für Flow Cover Cuts“ einen „Generalized Cover“ erzeugen

$$\min 1/3 z_4 - 0 z_5 - 0 z_6 + 2/3 z_7 - 0 z_8$$
$$s.t. 60 z_4 + 60 z_5 - 60 z_6 - 60 z_7 + 60 z_8 > 20, \quad z \in B^5$$

NewModel	x4	x5	x6	x7	x8	***TYP***	***RHS***
Min	0,333	0	0	0,667	0		
LB	0	0	0	0	0		
UB	1	1	1	1	1		
TYP	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**	**BIN**		
Cover	60	60	-60	-60	60	>=	20
Activity	0	1	0	0	1		0

Das Ergebnis zeigt, dass nur die beiden Variablen x_5 und x_8 für C_1 und C_2 in Frage kommen. Da beide Positiv sind ergibt sich:
$C_1 = \{5,8\},\ C_2 = \emptyset$ mit $\lambda = 100$
$(60 + 60 = 20 + \lambda)$
$L_2 = \emptyset$

$$x_5 + x_8 + (60-100)^+ (1 - y_5) + (60-100)^+ (1 - y_8) \le 20 + x_6 + x_7$$
$$x_5 + x_8 - x_6 - x_7 - y_5 - y_8 \le 18$$
$$0 + 0 - 0 - 20 - 0 - 0 = -20 \le 18 \quad Cut \neg verlezt$$

Zeile 3:

Jetzt wenden wir einen Aggregated c-MIR an und zwar mit 1 und 3

$$\begin{array}{cccccccc}
-x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & =100 \\
 & +x_2 & -x_3 & & -x_6 & -x_9 & +x_{10} & =-20 \\
\hline
-x_1 & & & +x_4 & -x_6 & -x_9 & -x_{10} & =80
\end{array}
\qquad \rightarrow \quad -x_1 + x_4 - x_6 - x_9 + x_{10} \le 80$$

Bound Substitution

$$y_1^* = 0,\ x_1 \ge 0 \ \Rightarrow\ x_1 - t_1 = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = t_1$$
$$y_4^* = 1 > 0,\ x_4 \le 60 y_4 \ \Rightarrow\ x_4 + t_4 = 60 y_4 \ \Rightarrow\ x_4 = 60 y_4 - t_4$$
$$y_6^* = 0,\ x_6 \ge 0 \ \Rightarrow\ x_6 - t_6 = 0 \ \Rightarrow\ x_6 = t_6$$
$$y_9^* = 0,\ x_9 \ge 0 \ \Rightarrow\ x_9 - t_9 = 0 \ \Rightarrow\ x_9 = t_9$$
$$y_{10}^* = 2/3 > 0,\ x_{10} \le 60 y_{10} \ \Rightarrow\ x_{10} + t_{10} = 60 y_{10} \ \Rightarrow\ x_{10} = 60 y_{10} - t_{10}$$

$$f = b - \lfloor b \rfloor,\ f_j = a_j - \lfloor a_j \rfloor \quad for\ j \in N$$

$$\sum_{j \in N} \left(\lfloor a_j \rfloor + \frac{(f_j - f)^+}{1 - f} \right) y_j \le \lfloor b \rfloor + \frac{s}{1 - f}$$

$$-x_1+60y_4-t_4-x_6-x_9+60y_{10}-t_{10}\le 80$$
$$-x_1-x_6-x_9-60\overline{y}_4-t_4-60\overline{y}_{10}-t_{10}\le 80-60-60=-40$$
$$-\overline{y}_4-\overline{y}_{10}-1/60t_4-1/60t_{10}-1/60x_1-1/60x_6-1/60x_9\le -2/3$$
$$-\overline{y}_4-\overline{y}_{10}-\frac{1/60t_4}{1-1/3}-\frac{1/60t_{10}}{1-1/3}-\frac{1/60x_1}{1-1/3}-\frac{1/60x_6}{1-1/3}-\frac{1/60x_9}{1-1/3}\le -1 \qquad \left(\lfloor -2/3\rfloor,\ f=1/3\right)$$
$$-\overline{y}_4-\overline{y}_{10}-\frac{1}{40}t_4-\frac{1}{40}t_{10}-\frac{1}{40}x_1-\frac{1}{40}x_6-\frac{1}{40}x_{19}\le -1$$
$$-40\overline{y}_4-40\overline{y}_{10}-t_4-t_{10}-x_1-x_6-x_{19}\le -40$$
$$-40(1-y_4)-40(1-y_{10})-(60y_4-x_4)-(60y_{10}-x_{10})-x_1-x_6-x_{19}\le -40$$
$$-40+40y_4-40+40y_{10}-60y_4+x_4-60y_{10}+x_{10}-x_1-x_6-x_{19}\le -40$$
$$+40y_4+40y_{10}-60y_4+x_4-60y_{10}+x_{10}-x_1-x_6-x_{19}\le -40$$
$$-20y_4-20y_{10}+x_4+x_{10}-x_1-x_6-x_{19}\le 40$$
$$-20*1-20*2/3+40+40-0-0-0=46\,{}^2\!/_3\not\le 40\quad \textit{Cut verletzt}$$
$$z^*=344\,{}^1\!/_3$$

Zeile 5:

$$-x_7+x_8+x_9=-20$$
$$x_7-x_8-x_9\le 20 \qquad \to\quad N_1=\{7\},N_2=\varnothing$$

Mit Hilfe der „Separation Heuristic für Flow Cover Cuts“ einen „Generalized Cover“ erzeugen

$$\min 2/3z_7-0z_8-0z_9$$
$$s.t. 60z_7-60z_8-60z_9>20,\quad z\in B^3$$

Aufgabe 2	x7	x8	x9	***TYP***	***RHS***
Min	0,67	0,00	0,00		
LB	0	0	0		
UB	1	1	1		
TYP	**BIN**	**BIN**	**BIN**		
cover	60	-60	-60	>=	20,01
Activity	1	0	0		0,67

Das Ergebnis zeigt, dass nur die eine Variable x_7 für C_1 und C_2 in Frage kommt. Da diese Positiv ist, ergibt sich:

$C_1=\{7\},\ C_2=\varnothing$ mit $\lambda=40$

$(60=20+\lambda)$

$L_2=\varnothing$

$$x_7+(60-40)^+(1-y_7)\le 20+x_8+x_9$$
$$x_7+20-20y_7\le 20+x_8+x_9$$
$$x_7-x_8-x_9-20y_7\le 0$$
$$20-0-0-20*1/3=13\,{}^1\!/_3\not\le 0\quad \textit{Cut verlezt}$$

Jetzt ergibt sich erst ein optimaler, ganzzahliger Wert $z^*=423$, mit

$x^*=(0\quad 0\quad 60\quad 40\quad 0\quad 0\quad 20\quad 0\quad 0\quad 40),\quad y^*=(0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1)$

Aufgabe 3)

a)

Iteration 1:

1) Round the courrent LP solution x^* to the nearest integer solution $\tilde{x}$

Aufgabe3	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	***TYP***	***RHS***
Max	2	4	3	6	3	4	5	6	4	5		
LB												
UB	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
TYP	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON		
KN1	2	5	4	2	6						<=	10
KN2		2	4	2	3	5					<=	10
KN3	1			4	3	2		4			<=	10
KN4					3	2	5	3	8		<=	10
KN5	5		3							5	<=	10
KN6		4					3	4	3		<=	10
Activity	0,55	0,70	0,75	1,00	0,00	0,72	1,00	1,00	0,07	1,00		31,31

$$\tilde{x} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

2) Reoptimize the LP relaxation using the objective function $\min \Delta\left(x, \tilde{x}\right) = \sum_{j \in I} \left| x_j - \tilde{x}_j \right|$

$$\min - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 - x_8 + x_9 - x_{10}$$

$$x^* = [0,84 \quad 0,96 \quad 0,27 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0,79 \quad 0 \quad 1]$$

3) if x^* integer or iteratin/time limit reached, Stopp, else go to 1

Iteration 2:

1) Round the courrent LP solution x^* to the nearest integer solution $\tilde{x}$

Aufgabe3	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	***TYP***	***RHS***
Max	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1		
LB												
UB	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
TYP	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON		
KN1	2	5	4	2	6						<=	10
KN2		2	4	2	3	5					<=	10
KN3	1			4	3	2		4			<=	10
KN4					3	2	5	3	8		<=	10
KN5	5		3							5	<=	10
KN6		4					3	4	3		<=	10
Activity	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,75	0,00	1,00		6,75

$$\tilde{x} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

2) Reoptimize the LP relaxation using the objective function $\min \Delta\left(x, \tilde{x}\right) = \sum_{j \in I} \left| x_j - \tilde{x}_j \right|$

$$\min - x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 - x_8 + x_9 - x_{10}$$

$$x^* = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0,75 \quad 0 \quad 1]$$

3) if x^* integer or iteratin/time limit reached, Stopp, else go to 1

Iteration 3:

1) Round the courrent LP solution x^* to the nearest integer solution $\tilde{x}$

$\tilde{x} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$ the same solution ~> cycling

$$flip\ \tilde{x}_j \quad \forall j \in \left\{ j \in I, x_j^* \text{ non integer} \right\} \ \rightarrow \ \tilde{x}_8 = 0$$

$$\tilde{x} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Aufgabe3	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	***TYP***	***RHS***
Max	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1		
LB												
UB	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
TYP	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON	CON		
KN1	2	5	4	2	6						<=	10
KN2		2	4	2	3	5					<=	10
KN3	1			4	3	2		4			<=	10
KN4					3	2	5	3	8		<=	10
KN5	5		3							5	<=	10
KN6		4					3	4	3		<=	10
Activity	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,00	1,00		6,00

2) Reoptimize the LP relaxation using the objective function $\min \Delta\left(x, \tilde{x}\right) = \sum_{j \in I} \left| x_j - \tilde{x}_j \right|$

$$\min - x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 + x_8 + x_9 - x_{10}$$

$$x^* = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

3) if x^* integer or iteratin/time limit reached, Stopp, else go to 1

Here the "Feasibility Pump Heuristic" found a solution $x_{IP}^* = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

b)

$$\overline{S} = \left\{ j \in B : \overline{x}_j = 1 \right\}$$

$$\Delta\left(x, \overline{x}\right) = \sum_{j \in \overline{S}} \left(1 - x_j\right) + \sum_{j \in B \setminus \overline{S}} x_j \leq k$$

$$\tilde{x} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

1) Define a k-neigborhodd to search in for some small integer value k and a known IP solution $\overline{x}$: $k = 2$

$$\overline{S} = \{1, 2, 4, 6, 7, 10\}$$

$$\Delta\left(x, \overline{x}\right) = \left(1 - x_1\right) + \left(1 - x_2\right) + x_3 + \left(1 - x_4\right) + x_5 + \left(1 - x_6\right) + \left(1 - x_7\right) + \left(1 - x_8\right) + x_9 + \left(1 - x_{10}\right) \leq 2$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 + x_8 + x_9 - x_{10} \leq 2 - 6 = -4$$

Hier wird keine Verbesserung erziehlt!

Aufgabe 4)

leider keine Zeit mehr ☹