Angewandte ganzzahlige Optimierung

WS 2007/2008

Aufgabenblatt 1

Bearbeiten Sie die unten angegebenen Aufgaben in Gruppen von maximal zwei Teilnehmern. Jede Gruppe gibt eine eigenhändig erstellte Ausarbeitung ab und ist verpflichtet ggf. die eigene Lösung in der Lehrveranstaltung zu präsentieren. Wenn von zwei Gruppen die gleiche oder eine übermäßig ähnliche Ausarbeitung abgegeben wird, werden bis zu Klärung des Sachverhalts keine Punkte vergeben.

Die Lösungen müssen auf Papier, handschriftlich oder als Ausdruck, im Sekretariat des Lehrstuhls auf N4, in der Lehrveranstaltung oder im Briefkasten auf C2 abgegeben werden. In allen Fällen müssen auf dem Abgabedokument Name, Matrikelnummer und E-Mail-Adresse von beiden beteiligten Studenten zu finden sein.

Spätester Abgabetermin: **Dienstag, 13.11.2007 um 23:59 Uhr**

Aufgabe 1

Gegeben sei die Lösungsmenge eines IP

$$X = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$$

und die zwei Formulierungen für X

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{0} \le x \le \mathbf{1}, \quad 27x_1 + 16x_2 + 4x_3 \le 30\}$$

und

$$\begin{aligned} P_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{0} \le x \le \mathbf{1}, \quad & 27x_1 + 16x_2 + 4x_3 \le 30 \\ & x_1 + x_2 \le 1\}. \end{aligned}$$

Beweisen sie, dass P_2 eine *bessere* Formulierung (nach Def. 1.4 in Wolsey - Integer Programming) für X ist als P_1.

Aufgabe 2

Ein Unternehmen möchte einen Produktionsplan für die nächsten 6 Wochen erstellen. Wenn in einer Periode t produziert wird entstehen Fixkosten $\{60, 20, 40, 40, 10, 30\}$. Die variablen Kosten pro produzierter Einheit betragen $\{2, 3, 3, 4, 7, 5\}$. Das einlagern einer Einheit kostet in allen Perioden 4. Der Bedarf in den nächsten sechs Wochen ist bekannt und beträgt $\{6, 3, 4, 4, 7, 4\}$.

a) Formulieren das Problem als Uncapacitated Lot-Sizing (ULS) Problem wie auf Seite 11 in Wolsey - Integer Programming angegeben. Lösen sie es mit MOPS Studio.

b) Verwenden sie nun die Extended Formulation von Seite 14 in Wolsey - Integer Programming. Achten sie darauf für die neuen Variablen w_{it} die richtigen Kosten zu berechnen! Vergleichen sie die beiden Formulierungen und interpretieren sie den Verlauf der Optimierung mit Hilfe der von MOPS ausgegebenen Statistiken.

Aufgabe 3

a) Bestimmen sie für jede der unten angegebenen Matritzen ob sie total unimodular ist oder nicht. Begründen sie ihre Antworten.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Erklären sie mit eigenen Worten warum und unter welchen Voraussetzungen die Lösung der LP Relaxation eines IP mit einer Matrix die TU ist immer ganzzahlig sein muss. Schreiben sie weniger als eine Seite.

Aufgabe 4

a) Lösen sie das folgende Constant Capacity Lot-Sizing Problem durch Branch and Bound. Berechnen sie die LP Relaxationen in den Knoten mit ClipMOPS (http://www.mops.fu-berlin.de). Stellen sie den Baum graphisch dar und beschriften sie jeden Knoten mit der aktuellen Primal Bound und dem Wert der LP Relaxation des Knotens. Nummerieren sie die Knoten in der Reihenfolge, in der sie ihre LP Relaxationen lösen. Beschriften sie die Kanten mit den in diesem Branch gemachten Fixierungen. Markieren sie, wenn und warum sie einen Knoten abschneiden. Geben sie den Zielfunktionswert und die Variablenwert der von ihnen ermittelten optimalen Lösung an. Verwenden sie eine Most Infeasible Branching Strategie und eine Depth First Node Selection. Berechnen sie immer erst den rechten Knoten, also den Zweig bei dem auf 1 fixiert wird.

b) Wie a), aber verwenden sie eine Best First Node Selection.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + 8x_1 + 9x_2 + 21x_3 + 17x_4 + 76y_1 + 142y_2 + 87y_3 + 104y_4 \\
& x_1 = 4 + s_1 \\
& x_2 + s_1 = 11 + s_2 \\
& x_3 + s_2 = 12 + s_3 \\
& x_4 + s_3 = 19 + s_4 \\
& x_1 \leq 20y_1 \\
& x_2 \leq 20y_2 \\
& x_3 \leq 20y_3 \\
& x_4 \leq 20y_4 \\
& s, x \in \mathbb{R}^4, y \in \{0,1\}^4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Zusätzliche Aufgabe ohne Wertung: Lösen sie das MIP aus Aufgabe 2a) durch Branch and Bound wie in Aufgabe 4. Verbessern sie ggf. die Formulierung um eine bessere LP Relaxation zu erhalten, allerdings ohne die Extended Formulation zu verwenden (also ohne zusätzliche Variablen einzuführen). Experimentieren sie mit verschiedenen Branching und Node Selection Strategien. Achtung, hier muss man eventuell sehr viele Knoten berechnen.